Dodatna nastava iz programiranja 2008/2009 

Prirodno Matematiˇcki Fakultet, Niˇs

datum: 22. novembar 2008. godine

predavaˇc: Nikola Milosavljevi´c

e-mail: nikola5000@gmail.com

Osnovni geometrijski algoritmi - teorija

1 Osnovni geometrijski objekti

Rastojanje izmed¯u taˇcaka *A*(*xA, yA*) i *B*(*xB, yB*) u koordinatnoj ravni jednako je *Dist*(*A, B*) = p(*xA − xB*)2 + (*yA − yB*)2 (1)

Jednaˇcina kruˇznice: Taˇcka *M*(*x, y*) pripada kruˇznici sa centrom u taˇcki *C*(*xC, yC*) i polupreˇcnikom *r >* 0 ako i samo ako vaˇzi

(*x − xC*)2 + (*y − yC*)2 = *r*2(2)

Taˇcka *M*(*x, y*) se nalazi unutar (van) kruˇznice ako u gornjoj jednakosti umesto znaka ” = ” stoji znak ” *<* ” (” *>* ”). Jednaˇcina (2) predstavlja jednaˇcinu kruˇznice sa centrom u taˇcki *C*(*xC, yC*) i polupreˇcnikom *r >* 0.

Jednaˇcina prave: Taˇcka *M*(*x, y*) pripada pravoj *p* odred¯enom (razliˇcitim) taˇckama *M*1(*x*1*, y*1) i *M*2(*x*2*, y*2), u oznaci *p*(*M*1*M*2), ako i samo ako vaˇzi

(*x − x*1)(*y*2 *− y*1) *−* (*x*2 *− x*1)(*y − y*1) = 0 (3)

Ako oznaˇcimo sa *f*(*x, y*) levu stranu jednaˇcine (3) onda je za *f*(*x, y*) *>* 0 poloˇzaj taˇcke *M*(*x, y*) sa jedne strane prave *p*, dok je za *f*(*x, y*) *<* 0 taˇcka *M*(*x, y*) sa suprotne strane prave *p*. Sred¯ivanjem jednaˇcine (3) i uvode´ci smene *a* = *y*2 *− y*1, *b* = *−*(*x*2 *− x*1) i *c* = *y*1*x*2 *− x*1*y*2 dobijamo njoj ekvivalentnu jednaˇcinu (implicitni oblik prave):

*ax* + *by* + *c* = 0 (4)

Jednaˇcina (3), tj. (4), predstavljaja jednaˇcinu prave *p* odred¯enu taˇckama *M*1(*x*1*, y*1) i *M*2(*x*2*, y*2).

Pripadnost duˇzi: Taˇcka *M*(*x, y*) pripada duˇzi ˇcije su krajnje taˇcke *M*1(*x*1*, y*1) i *M*2(*x*2*, y*2), u oznaci *d*[*M*1*M*2], ako i samo ako vaˇzi jednaˇcina (3) i vaˇzi

*min*(*x*1*, x*2) *≤ x ≤ max*(*x*1*, x*2)*, min*(*y*1*, y*2) *≤ y ≤ max*(*y*1*, y*2) (5) tj. taˇcka *M* mora da pripada odgovaraju´coj pravoj i da se nalazi izmed¯u taˇcaka *M*1 i *M*2.

1

2 Osobine i odnosi izmed¯u geometrijskih objekta

Rastojanje izmed¯u taˇcke *M*(*x, y*) i prave *p*(*M*1*M*2) jednako je

*Dist*(*M, p*) = *|ax* + *by* + *c|*

*~~√~~a*~~2~~ + *b*~~2~~(6)

gde su *a*, *b* i *c* odgovaraju´ci koeficijenti iz jednaˇcine (4).

Eksplicitni oblik prave: Svaka prava *p*, odred¯ena taˇckama *M*1(*x*1*, y*1) i *M*2(*x*2*, y*2), koja nije nor malna na *x*-osu, moˇze se na jedinstven naˇcin predstaviti u obliku *y* = *kx* + *n*, gde je *k* koeficijent pravca a *n* presek prave *p* sa *y*-osom i vaˇzi

*x*2 *− x*1*, n* =*y*1*x*2 *− y*2*x*1

*k* =*y*2 *− y*1

*x*2 *− x*1(7)

Paralelnost pravih: Prave *p*1(*A, B*) i *p*2(*C, D*) su paralelne ako i samo ako vaˇzi (*yB − yA*)(*xD − xC*) *−* (*yD − yC*)(*xB − xA*) = 0 (8)

Za koeficijente pravca paralelnih pravih *p*1 i *p*2 vaˇzi *k*1 = *k*2.

Normalnost pravih: Prave *p*1(*A, B*) i *p*2(*C, D*) su normalne ako i samo ako vaˇzi (*yB − yA*)(*yD − yC*) + (*xB − xA*)(*xC − xD*) = 0 (9)

Za koeficijente pravca normalnih pravih *p*1 i *p*2 vaˇzi *k*1*k*2 = *−*1.

Presek dve duˇzi: Duˇzi *d*[*AB*] i *d*[*CD*] mogu da imaju zajedniˇckih unutraˇsnjih taˇcaka, da jedna od krajnjih taˇcaka jedne duˇzi pripada drugoj duˇzi ili da nemaju zajedniˇckih taˇcaka. Ako oznaˇcimo sa *f*(*M, M*1*M*2) levu stranu jednaˇcine (3) (provera da li taˇcka *M* pripada pravoj *p*(*M*1*M*2)) onda vaˇzi:

Duˇzi *d*[*AB*] i *d*[*CD*] imaju zajedniˇckih taˇcaka ako i samo ako jedna od krajnjih taˇcaka jedne duˇzi pripada drugoj duˇzi (provera na osnovu jednaˇcina (3) i (5)) ili ako vaˇzi:

*f*(*A, CD*)*f*(*B, CD*) *<* 0 *i f*(*C, AB*)*f*(*D, AB*) *<* 0 (10)

Povrˇsina prostog poligona *M*1*M*2 *. . . Mn* (ne nuˇzno konveksnog) jednaka je 2*|*X*n*

1

*i*=1

(*xi − xi*+1)(*yi* + *yi*+1)*|* (11)

gde je (*xn*+1*, yn*+1) = (*x*1*, y*1). Specijalno, za *n* = 3, posle sred¯ivanja dobijamo izraz za povrˇsinu

trougla:

*P4M*1*M*2*M*3 =12*|x*1*y*2 + *x*2*y*3 + *x*3*y*1 *− x*1*y*3 *− x*2*y*1 *− x*3*y*2*|* (12) 2

3 Vektori

Ako sa *O* oznaˇcimo koordinatni poˇcetak, onda za svaku taˇcku *M*(*x, y*), vektor *−−→OM* moˇzemo predstaviti samo kao (*x, y*). Proizvoljni vektor *−−−−→ M*1*M*2 moˇzemo translirati do koordinatnog poˇcetka i, prema tome, moˇzemo ga predstaviti u obliku (*x*2 *− x*1*, y*2 *− y*1). Intenzitet vektora (*x, y*) jednak je p*x*2 + *y*2.

Skalarni proizvod vektora *−−→AB* i*−−→CD*, u oznaci*−−→AB ·−−→CD*, je realan broj *a* = *|−−→AB||−−→CD|* cos *θ* gde je *θ* ugao izmed¯u ta dva vektora. Ako je *−−→AB* = (*x*1*, y*1) a *−−→CD* = (*x*2*, y*2) tada je

*−−→AB ·−−→CD* = *x*1*x*2 + *y*1*y*2 (13)

Vektorski proizvod vektora *−−→AB* i*−−→CD*, u oznaci*−−→AB ×−−→CD*, je vektor *−→v* koji je normalan na ravan odred¯enu vektorima *−−→AB* i*−−→CD*, ˇciji je pravac odred¯en pravilom desnog zavrtnja u odnosu na pomenute vektore i ˇciji je intenzitet *|−→v |* = *|−−→AB||−−→CD||*sin *θ|* gde je *θ* ugao izmed¯u ta dva vektora. Ako je *−−→AB* = (*x*1*, y*1) a *−−→CD* = (*x*2*, y*2) tada je

*|−−→AB ×−−→CD|* = *|**x*1 *y*1 *x*2 *y*2

*|* = *|x*1*y*2 *− y*1*x*2*|* (14)

Desna strana jednaˇcine (14) predstavlja dvostruku povrˇsinu trougla odred¯enog vektorima *−−→AB* i *−−→CD* dovod¯enjem na zajedniˇcki poˇcetak.

Od znaˇcaja nam je ne samo vrednost ve´c i znak izraza iz jednaˇcine (14) pa ´cemo nadalje sa *V P*(*−−→AB, −−→CD*) oznaˇcavati vrednost desene strane bez apsolutne vrednosti u jednaˇcini (14).

Koriˇs´cenjem vektorskog i skalarnog porizvoda dobijamo:

Vektori *−−→AB* i*−−→CD* su normalni akko je *−−→AB ·−−→CD* = 0. Koriste´ci da je *−−→AB* = (*xB − xA, yB − yA*) i *−−→CD* = (*xD − xC, yD − yC*) i jednaˇcinu (13) dobijamo uslov kao u jednaˇcini (9).

Vektori *−−→AB* i*−−→CD* su paraleni akko je *−−→AB ×−−→CD* = 0. Koriste´ci da je *−−→AB* = (*xB − xA, yB − yA*) i *−−→CD* = (*xD − xC, yD − yC*) i jednaˇcinu (14) dobijamo uslov kao u jednaˇcini (8).

Taˇcke *A*, *B* i *C* su kolinearne akko je *−−→AB ×−→AC* = 0. Koriste´ci da je *−−→AB* = (*xB − xA, yB − yA*) i *−→AC* = (*xC − xA, yC − yA*) i jednaˇcinu (14) dobijamo uslov kao u jednaˇcini (3).

Povrˇsina trougla *4ABC* jednaka je 12*|−−→AB ×−→AC|*. Koriste´ci jednaˇcinu (14) dobijamo formulu (12). Linija *M*0*M*1*M*2 skre´ce ulevo (udesno) akko je *V P*(*−−−−→ M*0*M*1*,−−−−→ M*0*M*2) *>* 0 (*V P*(*−−−−→ M*0*M*1*,−−−−→ M*0*M*2) *<* 0).

3